Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x}\,\mathrm{dx}$$

Multiplicamos el numerador y denominador por $\sec^2(x)$ para eliminar el $\cos^2(x)$ del primer sumando del denominador y dividir los cosenos en el segundo sumando para obtener la tangente.

Recordemos antes que:

$$\sec^2 x = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Y aplicando lo dicho al principio:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x)}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\cancel{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tg} x}\,\mathrm{dx}$$

Observando el numerador y el denominador, nos fijamos en que tenemos la función tangente y su derivada, así que es conveniente realizar un cambio de variable:

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$\mathrm{dt} = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{dx}$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tg} x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1 + t}\,\mathrm{dt}$$

Ya tenemos una función fácilmente integrable, ya que el numerador es la derivada del denominador, es decir, se trata de una integral de tipo logarítmica:

$$\int \frac{1}{1 + t}\,\mathrm{dt} = \ln|1 + t| + C$$

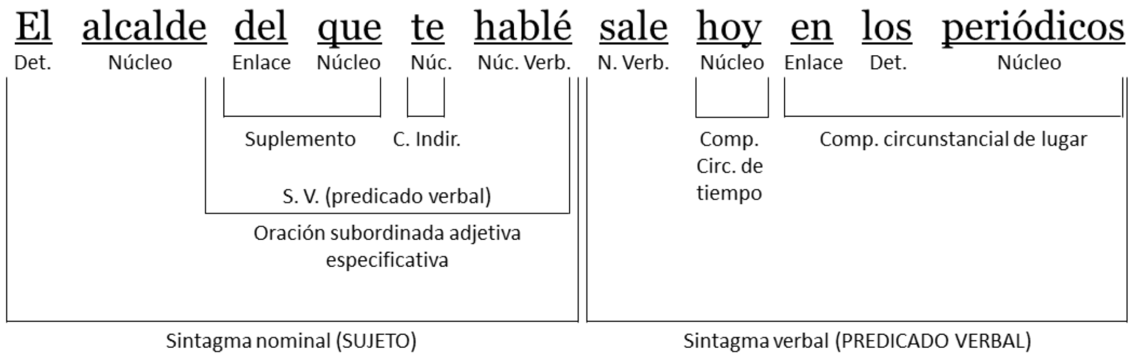
Finalmente, realizamos de nuevo el cambio de variable:

$$\ln(1 + t) + C = \mathbf{\ln|1 + \operatorname{tg} x| + C}$$

Desarrolla el análisis morfosintáctico de la siguiente oración:

“El alcalde del que te hablé sale hoy en los periódicos”.

Análisis sintáctico:



Análisis morfológico:

El: determinante artículo determinado. Masculino, singular.

Alcalde: sustantivo. Común, concreto, individual, masculino, singular.

Del = de + el. De: preposición.

El que: determinante relativo singular de persona.

Te: pronombre personal átono. 2ª persona del singular.

Hablé: verbo. 1ª persona del singular del pretérito perfecto simple de indicativo del verbo hablar (1ª conjugación).

Sale: verbo. 3ª persona del singular del presente de indicativo del verbo salir (3ª conjugación).

Hoy: adverbio de tiempo.

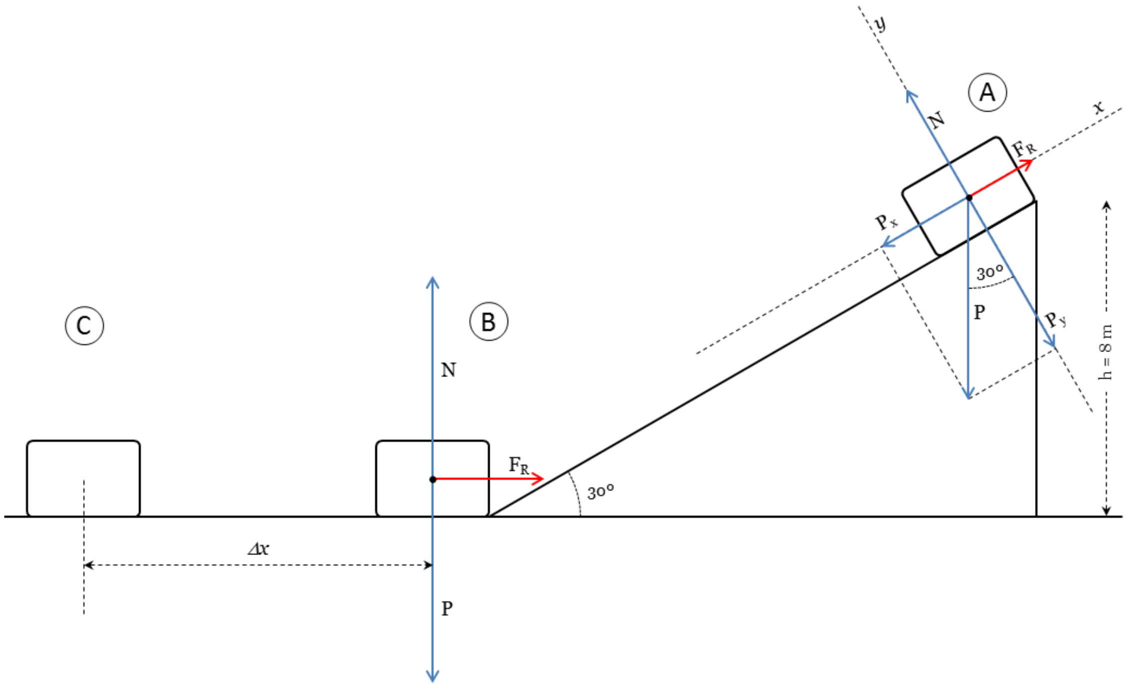
En: preposición.

Los: determinante artículo determinado. Masculino, plural.

Periódicos: sustantivo. Común, concreto, individual, masculino, plural.

Un cuerpo de 5 kg de masa se deja caer por una rampa que forma un ángulo de 30º y tiene una altura de 8 m. Teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento rampa-cuerpo y suelo-cuerpo es 0,2, y suponiendo que al llegar al suelo el cuerpo sigue avanzando, calcula el espacio que recorrerá hasta detenerse por completo.

En primer lugar, dibujamos un croquis del problema en el que aparezcan representadas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cada una de las 3 situaciones: cuerpo cayendo por la rampa (A), avanzando por el suelo (B) y finalmente en reposo (C).



Situación A: el cuerpo desciende por la rampa

Calculamos el peso de cuerpo, así como las componentes del peso en el eje x y eje y:

$$P = m \cdot g = 5 \cdot 9{,}8 = 19{,}6\ N$$
$$P_x = P \cdot sen\ 30^o = 19{,}6 \cdot sen\ 30^o = 9{,}8\ N$$
$$P_y = P \cdot cos\ 30^o = 19{,}6 \cdot cos\ 30^o = 16{,}97\ N$$

Dado que el cuerpo permanece inmóvil respecto al eje y, deducimos que el sumatorio de fuerzas en ese eje es cero:

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P_y = 0$$

$$N = P_y = 16{,}97\ N$$

A partir de este dato, podemos obtener la fuerza de rozamiento:

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 16{,}97 = 3{,}39\ N$$

Sabiendo que el cuerpo desciende por la rampa, aplicamos la segunda ley de Newton para el eje x para calcular la aceleración:

$$\sum F_x = m \cdot a$$

$$P_x - F_R = m \cdot a$$

$$9{,}8 - 3{,}39 = 5 \cdot a$$

$$a = \frac{9{,}8 - 3{,}39}{5} = 1{,}28\ m/s^2$$

Sabemos que el cuerpo llega al suelo con una velocidad debida a la aceleración que ha experimentado a lo largo de la rampa. Podemos calcular esa velocidad final aplicando las ecuaciones del MRUA:

$$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v = v_o + a \cdot t$$

De estas ecuaciones sabemos la aceleración y la posición y velocidad iniciales que son cero. Podemos conocer también la posición final, es decir, la longitud de la rampa, dado que tenemos un triángulo rectángulo del cual conocemos la longitud de uno de sus catetos:

$$\tan 30^o = \frac{8}{x}$$

$$x = \frac{8}{\tan 30^o} = 13{,}86\ m$$

Despejamos el tiempo de la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda:

$$8 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{8}{0{,}5 \cdot 1{,}28}} = 3{,}54\ s$$

$$v = 0 + 1{,}28 \cdot 3{,}54 = 4{,}53\ \mathrm{m/s}$$

Situación B: el cuerpo avanza por la superficie horizontal

Dado que el cuerpo permanece inmóvil respecto al eje y, deducimos que el sumatorio de fuerzas en ese eje es cero:

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P = 0$$

$$N = P = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

A partir de este dato, podemos obtener la fuerza de rozamiento:

$$F_R = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 19{,}6 = 3{,}92\ \mathrm{N}$$

Calculamos la aceleración (deceleración) que actúa sobre el cuerpo producida por la fuerza de rozamiento.

$$\sum F_x = -F_R = m \cdot a$$

$$-3{,}92 = 5 \cdot a$$

$$a = \frac{-3{,}92}{5} = -0{,}784\ \mathrm{m/s^2}$$

De nuevo se trata de un MRUA. Conocemos la velocidad inicial (es la misma que la velocidad final de la situación A), la velocidad final que es cero, la aceleración, y la posición y velocidad iniciales que son cero:

$$v = v_o + a \cdot t$$

$$0 = 4{,}53 - 0{,}784 \cdot t$$

$$t = \frac{-4{,}53}{-0{,}784} = 5{,}78\ \mathrm{s}$$

$$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$x = 0 + 4{,}53 \cdot 5{,}78 + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}784) \cdot 5{,}78^2 = \mathbf{13{,}08\ m}$$

Complete the following article by writing each missing word in the correct box:

*Blue whales, the world's largest animals, have been sighted again in British waters for the first time in **(1)** ..... least twenty years. Indications that a population of blue whales was inhabiting the waters west **(2)** ..... Scotland came for the first time from the United States Navy, **(3)** ..... surveillance system picked up the songs of a lot of different whales. American zoologists subsequently identified the blue whale song among **(4)** ..... .*

*Now marine biologist, Carol Booker, **(5)** ..... actually seen a blue whale there herself. She has no doubt about what she saw, because they have distinctive fins which are very small for **(6)** ..... size. She says, 'Worldwide they were almost extinct and **(7)** ..... seemed they had completely vanished from the North Atlantic, so you can imagine how I felt actually seeing **(8)** ..... ! However, it is certainly **(9)** ..... soon to say if it is an indication of a population recovery.' She goes **(10)** ..... to say, 'What it does show **(11)** ..... the importance of this area of the ocean for whales, and **(12)** ..... essential it is to control pollution of the seas.'*

*Bigger than **(13)** ..... dinosaur known to man, blue whales are the largest animals ever to **(14)** ..... lived on earth. A blue whale is more than six metres long at birth and, **(15)** ..... fully grown, its heart is the same height as a tall man and weighs as much as a horse.*

1. At
2. Of
3. Whose
4. Them/others/these
5. Has
6. Their
7. It
8. One
9. Too
10. On
11. Is
12. How
13. Any
14. Have
15. When/if

Los óxidos de nitrógeno forman parte de la polución de las grandes ciudades causada por la combustión de los motores de explosión. El N_2O_4 (g) es incoloro y el NO2 (g) es marrón y más tóxico.

En una experiencia de laboratorio se introducen 184,0 g de N_2O_4 (g) en un recipiente de 4,00 L y se calienta hasta 300 K para provocar la disociación del N_2O_4 (g) en NO_2 (g). Pasado un cierto tiempo, cuando la mezcla ha alcanzado el equilibrio, se analiza el contenido del recipiente y se encuentra que la cantidad de NO_2 (g) es 36,8 g.

a) Determina la constante de equilibrio en función de las concentraciones (K_c) de la reacción de disociación del N_2O_4 (g) a 300 K

b) Calcula el grado de disociación del N_2O_4 (g) a dicha temperatura.

Datos: Z(N) = 14,01 g/mol; Z(O) = 16,00 g/mol.

Apartado A

En primer lugar, escribimos la reacción en el equilibrio:

$$\mathrm{N_2O_4\ (g) \rightleftarrows 2\ NO_2\ (g)}$$

Calculamos los moles de cada sustancia al inicio y en el equilibrio:

$$\mathrm{n_o(N_2O_4) = \frac{m(N_2O_4)}{PM(N_2O_4)} = \frac{184{,}0\ g}{(2 \cdot 14{,}01 + 4 \cdot 16{,}00)\ g/mol} = 2{,}00\ moles}$$

$$\mathrm{n_{eq}(NO_2) = \frac{m\ (NO_2)}{PM\ (NO_2)} = \frac{36{,}8\ g}{(14{,}01 + 2 \cdot 16{,}00)\ g/mol} = 0{,}80\ moles}$$

A continuación, obtenemos las concentraciones molares:

$$\mathrm{M(N_2O_4) = \frac{n(N_2O_4)}{V(N_2O_4)} = \frac{2{,}00\ moles}{4{,}00\ L} = 0{,}50\ M}$$

$$\mathrm{M(NO_2) = \frac{n(NO_2)}{V(NO_2)} = \frac{0{,}80\ moles}{4{,}00\ L} = 0{,}20\ M}$$

Completamos una tabla en la que aparezcan las concentraciones molares iniciales, su variación y la concentración en el equilibrio para cada compuesto:

	N_2O_4	$\rightleftarrows$	$2\ NO_2$
$[\ ]_0$ (concentración inicial)	0,50		-
$[\ ]_x$ (variación de concentración)	- x		+ 2x
$[\ ]_{eq}$ (concentración final)	0,50 - x		2x

Escribimos la constante de equilibrio en función de las concentraciones:

$$k_c = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} = \frac{(2x)^2}{0{,}5 - x}$$

Y sabiendo que la concentración final de NO_2 es 0,20 M:

$$2x = 0{,}20$$

$$x = 0{,}1\ M$$

$$k_c = \frac{(2x)^2}{0{,}5 - x} = \frac{(2 \cdot 0{,}1)^2}{0{,}5 - 0{,}1} = \mathbf{0{,}1}$$

Apartado B

El grado de disociación (α) se calcula como:

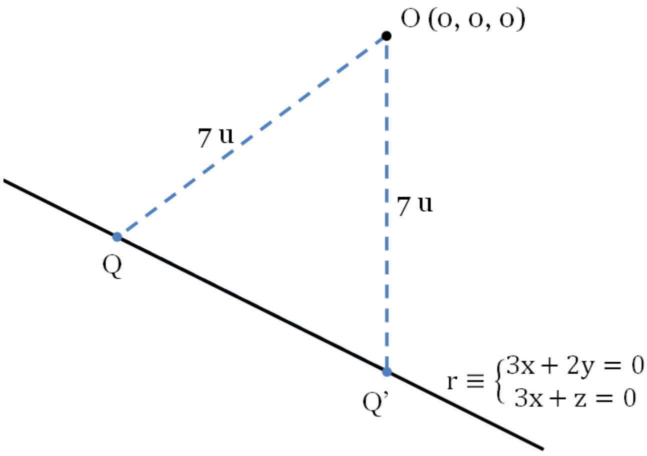
$$\alpha = \frac{[N_2O_4]_x}{[N_2O_4]_0} = \frac{0{,}10}{0{,}50} = \mathbf{0{,}2} = \mathbf{20}\ \%$$

Sea *r* la recta de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$

a) **Hallar los puntos de *r* cuya distancia al origen *O* es de 7 unidades.**
b) **Calcular la ecuación del plano *π* perpendicular a *r* que pasa por el punto *P* (1, 2, -1).**

Apartado A

Realizamos un dibujo sencillo para visualizar el problema:



Ya se puede deducir a partir del dibujo, que existen 2 puntos Q y Q' que equidistan del punto P.

En primer lugar, hallamos un punto genérico Q perteneciente a la recta r. Para ello, necesitamos la recta en forma paramétrica. En este caso, la recta está expresada como corte de 2 planos (forma implícita). Un sencillo método para pasar a la forma paramétrica es dar a *x* el valor de λ:

$$r \equiv \begin{cases} 3\lambda + 2y = 0 \\ 3\lambda + z = 0 \end{cases}$$

Despejamos *y* de la primera ecuación y *z* de la segunda:

$$3\lambda + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}\lambda$$

$$3\lambda + z = 0 \Rightarrow z = -3\lambda$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Podemos definir un punto genérico de la recta como Q $\left(\lambda, -\frac{3}{2}\lambda, -3\lambda\right)$.

La distancia entre 2 puntos se calcula como:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dado que sabemos que la distancia entre O y Q es 7, podemos establecer la siguiente ecuación:

$$7 = \sqrt{(\lambda - 0)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda - 0\right)^2 + (-3\lambda)^2}$$

$$7^2 = \left(\sqrt{(\lambda - 0)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda - 0\right)^2 + (-3\lambda)^2}\right)^2$$

$$49 = (\lambda - 0)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda - 0\right)^2 + (-3\lambda)^2$$

$$49 = \lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 + 9\lambda^2$$

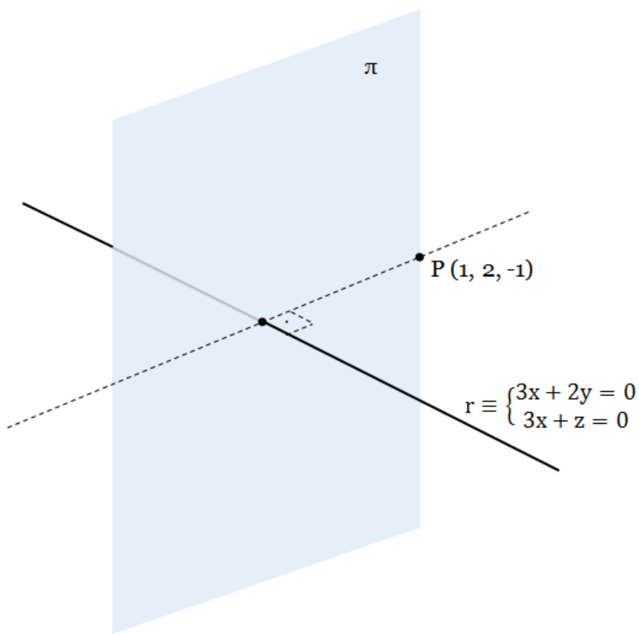
$$\frac{49}{4}\lambda^2 = 49 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Sustituyendo λ en la recta obtenemos los puntos Q y Q':

$$\mathbf{Q\,(2,-3,-6)} \qquad \mathbf{Q'\,(-2,3,6)}$$

Apartado B

Realizamos un dibujo sencillo para visualizar el problema:



Una de las formas de expresar la ecuación del plano π es a partir de un vector normal n_π y un punto que esté contenido en él. En este caso, el vector normal coincide con el vector director de la recta, y el punto es P. Tomando la ecuación del plano en la forma general Ax + Bx + Cz + D=0, el vector normal tiene la forma (A, B, C). Por tanto:

$$n_\pi = \left(1, -\frac{3}{2}, -3\right) \qquad P(1, 2, -1)$$

$$\pi \equiv x - \frac{3}{2}y - 3z + D = 0$$

De donde podemos despejar el coeficiente D:

$$1 - \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + D = 0$$

$$D = -1 + \frac{3}{2} \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

La ecuación del plano queda:

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - \frac{3}{2}y - 3z - 1 = 0}$$