Se pretende comprobar las ecuaciones referentes al péndulo simple. Para ello, se llevaron a cabo 2 experiencias en el laboratorio:

Primero se hizo oscilar 20 veces una pesita maciza y luego una hueca (con el mismo hilo) para diferentes medidas de la cuerda (precisión: 1 mm) mientras se midió con un cronómetro (precisión: 1 ms) el tiempo transcurrido. Las medidas obtenidas fueron anotadas en la siguiente tabla:

(Pesa maciza)

Longitud L (m)	Tiempo T para 20 oscilaciones (s)
0,320	22,220
0,346	23,439
0,458	26,984
0,486	27,998
0,528	29,033
0,592	30,712
0,620	31,410
0,692	33,217
0,750	34,640
0,774	35,219

(Pesa hueca)

Longitud L (m)	Tiempo T para 20 oscilaciones (s)
0,320	22,367
0,346	23,623
0,458	26,984
0,486	28,031
0,526	29,262
0,592	30,775
0,620	31,533
0,692	33,372
0,750	34,771
0,774	35,334

Objetivos:

- **Describir el fundamento teórico del péndulo simple con las ecuaciones correspondientes.**
- **Describir el procedimiento práctico incluyendo todos los pasos.**
- **Deducir las ecuaciones empleadas para el cálculo de errores.**
- **Anotar los resultados de las medidas obtenidas con la pesita maciza y la pesita hueca junto a su error en la siguiente tabla:**

Longitud L (m)	Tiempo T para 20 oscilaciones (s)	Periodo T (s)	T^2 (s^2)	$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$ (m/s^2)

- **Calcular el promedio de *g* junto al error del valor medio de *g*, y decir si es exacto.**
- **Representar gráficamente el cuadrado del período en función de la longitud (T^2 - L) junto a los errores, y valorar la calidad de ajuste teniendo en cuenta el valor de R^2.**
- **Responder a las siguientes cuestiones:**
  - ¿En qué te basarías para defender la aseveración: "en la experiencia realizada los péndulos han realizado un MAS en buena aproximación"?
  - A partir de las tablas de registro de datos, ¿se puede concluir que *T* no depende de la masa del péndulo?
  - Compara de forma crítica los valores de *g* obtenidos a partir de las medias de las diez medidas individuales de *g* y del obtenido con la pendiente de la recta de regresión con el valor teórico de $g = 9,81\ m/s^2$, valor que consideramos verdadero. Se razonará acerca de la exactitud y precisión de los resultados experimentales.
  - ¿Observas en tu tabla alguna relación de la incertidumbre o error de la medida indirecta de g respecto a la longitud L del péndulo? Intenta justificarla recurriendo a la "propagación de errores".

Péndulo simple

1. Fundamento teórico

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual (llamada en ocasiones pesa o lenteja) suspendida de un cordón sin masa y no estirable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio (vertical), oscilará alrededor de dicha posición. La trayectoria de la masa puntual no es una recta, sino el arco de un círculo de radio L igual a la longitud del cordón (figura 1.1). Usamos como coordenada la distancia *(x)* medida sobre el arco. Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debe ser directamente proporcional a x, o bien (porque $x = L \cdot \theta$), a θ.

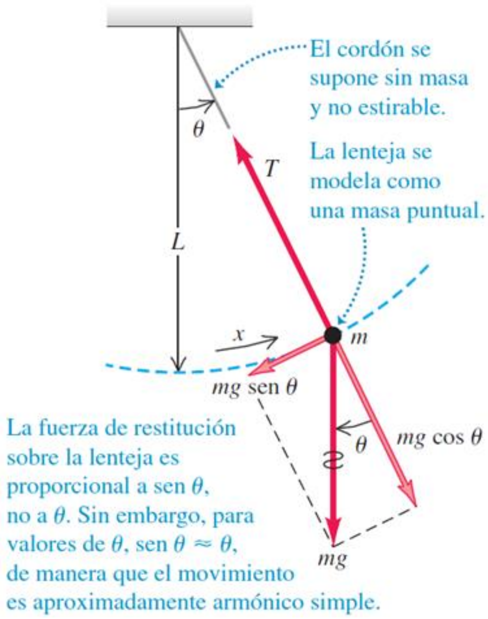

***Figura 1**. Péndulo simple idealizado*

En la figura 1.1, representamos las fuerzas que actúan sobre la masa en términos de componentes tangencial y radial. La fuerza de restitución (F_r) es la componente tangencial de la fuerza total:

$$F_r = -m \cdot g \cdot sen\theta \tag{1}$$

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión *(T)* solo actúa para hacer que la masa puntual describa un arco. La fuerza de restitución es proporcional no a θ sino a *sen* θ, así que el movimiento no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, *sen* θ es casi igual a θ en radianes.

La velocidad angular del cuerpo en su trayectoria circular *(ω)* y su velocidad angular tangencial *(*v_θ*)* son respectivamente:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2}$$

$$v_\theta = l \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{3}$$

El momento angular del cuerpo *(L)* y el momento de la fuerza *(τ)* con respecto al centro de giro son respectivamente:

$$|L| = l \cdot m \cdot v_\theta = m \cdot l^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{4}$$

$$|\tau| = l \cdot F_\theta = l \cdot m \cdot g \cdot sen\theta \tag{5}$$

La ecuación fundamental de la dinámica de rotación se traduce entonces en:

$$\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\theta}{d^2t} = -l \cdot m \cdot g \cdot sen\theta \tag{6}$$

Y finalmente:

$$\frac{d^2\theta}{d^2t} = -\frac{g}{l} \cdot sen\theta \tag{7}$$

Si las oscilaciones del péndulo tienen una amplitud menor que 30º, una buena aproximación de la ecuación (7) del péndulo es:

$$\frac{d^2\theta}{d^2t} = -\frac{g}{l} \cdot \theta \tag{8}$$

Se trata de la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia angular $\sqrt{g/L}$. Dicho de otra forma, el periodo de las oscilaciones del péndulo será:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{9}$$

2. Procedimiento experimental

Para la realización de la práctica vamos a utilizar el siguiente material:

- Pie soporte.
- Dos pesitas de masas diferentes: una maciza y otra hueca.
- Diez hilos de diferentes longitudes.
- Cronómetro.
- Cinta métrica.
- Balanza de precisión.

Los errores asociados a los distintos objetos de medida son (tabla 1):

Instrumento	Precisión
Cinta métrica	± 0,001 m
Cronómetro	± 0,001 s
Balanza de precisión	± 0,01 g

Tabla 1. *Errores asociados a los distintos objetos de medida.*

El procedimiento consiste en medir los periodos de oscilación (20 oscilaciones para mayor exactitud) de ambas pesitas para distintas longitudes del hilo. Tras obtener las medidas, se calculará el valor de la gravedad g despejándolo de la ecuación 9:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{L}{T^2} \tag{10}$$

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Ordenar los diez hilos de menor a mayor longitud.
2. Formar el péndulo con cada uno de los hilos (figura 1.2), empezando por el hilo más corto y colgar sucesivamente las pesitas: maciza y hueca.
3. Medir la longitud del péndulo, que es la distancia entre el centro de masa de la pesita y el punto de oscilación. Se tendrá en cuenta que esta longitud no es exactamente la misma para cada uno de los péndulos (pesita maciza, pesita hueca).
4. Dejar oscilar el péndulo con un ángulo máximo de 15º aproximadamente y contar el tiempo que tarda en dar 20 oscilaciones.

Por otra parte, se representará mediante ajuste por mínimos cuadrados el periodo al cuadrado *(T^2)* frente a la longitud del hilo *(L)*, dada la siguiente relación que se puede deducir a partir de la ecuación 10:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{L}{g} \tag{11}$$

El ajuste lineal a una recta del tipo $y = m{\cdot}x + b$ nos debería proporcionar un valor de $b=0$ y una pendiente $m=4\pi^2/\ g$, de donde podemos despejar el valor de la gravedad *(g)*:

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \tag{12}$$

3. Resultados experimentales

3.1. Cálculo de errores

Para las medidas directas se tomarán los errores asociados a los aparatos de medida expresados en la tabla 1.

Calculamos el error asociado a la gravedad *(g)* a partir del a ecuación 10:

$$\begin{aligned} \varepsilon(g) &= \left|\frac{\partial g}{\partial L} \cdot \varepsilon(L)\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial T} \cdot \varepsilon(T)\right| = \varepsilon(L) \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} + \varepsilon(T) \cdot \frac{4\pi^2 \cdot L \cdot 2}{T^3} = \\ &= 0{,}001 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} + 0{,}001 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot L \cdot 2}{T^3} = \frac{0{,}004 \cdot \pi^2}{T^2} + \frac{0{,}008\pi^2 \cdot L}{T^3} \end{aligned} \tag{13}$$

Por otra parte, calculamos el error asociado a la gravedad *(g)* para la ecuación 12:

$$\varepsilon(g) = \left|\frac{\partial g}{\partial m} \cdot \varepsilon(m)\right| = \varepsilon(m) \cdot \frac{4\pi^2}{m^2} \tag{14}$$

Para realizar el ajuste lineal debemos conocer el error de T^2 que se calcula como:

$$\varepsilon(T^2) = \left|\frac{\partial T^2}{\partial T} \cdot \varepsilon(T)\right| = \varepsilon(T) \cdot 2 \cdot T = 0{,}001 \cdot 2 \cdot T = 0{,}002 \cdot T \tag{15}$$

3.2. Resultados experimentales

Longitud L (m)	Tiempo T para 20 oscilaciones (s)	Periodo T (s)	T^2 (s^2)	$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$ (m/s^2)
0,320 ± 0,001	22,220 ± 0,001	1,111 ± 0,001	1,234 ± 0,002	10,23 ± 0,05
0,346 ± 0,001	23,439 ± 0,001	1,172 ± 0,001	1,373 ± 0,002	9,95 ± 0,04
0,458 ± 0,001	26,984 ± 0,001	1,349 ± 0,001	1,820 ± 0,002	9,93 ± 0,04
0,486 ± 0,001	27,998 ± 0,001	1,400 ± 0,001	1,960 ± 0,002	9,79 ± 0,03
0,528 ± 0,001	29,033 ± 0,001	1,452 ± 0,001	2,107 ± 0,002	9,89 ± 0,03
0,592 ± 0,001	30,712 ± 0,001	1,536 ± 0,001	2,358 ± 0,003	9,91 ± 0,03
0,620 ± 0,001	31,410 ± 0,001	1,571 ± 0,001	2,466 ± 0,003	9,92 ± 0,03
0,692 ± 0,001	33,217 ± 0,001	1,661 ± 0,001	2,758 ± 0,003	9,90 ± 0,03
0,750 ± 0,001	34,640 ± 0,001	1,732 ± 0,001	3,000 ± 0,003	9,87 ± 0,02
0,774 ± 0,001	35,219 ± 0,001	1,761 ± 0,001	3,101 ± 0,003	9,85 ± 0,02

***Tabla 2.1**. Resulta dos experimentales para la pesa hueca. Masa: 73,32 ± 0,01 g.*

Longitud L (m)	Tiempo T para 20 oscilaciones (s)	Periodo T (s)	T^2 (s^2)	$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$ (m/s^2)
0,320 ± 0,001	22,367 ± 0,001	1,118 ± 0,001	1,251 ± 0,002	10,10 ± 0,05
0,346 ± 0,001	23,623 ± 0,001	1,181 ± 0,001	1,395 ± 0,002	9,79 ± 0,04
0,458 ± 0,001	26,984 ± 0,001	1,355 ± 0,001	1,835 ± 0,002	9,85 ± 0,04
0,486 ± 0,001	28,031 ± 0,001	1,402 ± 0,001	1,964 ± 0,002	9,77 ± 0,03
0,526 ± 0,001	29,262 ± 0,001	1,463 ± 0,001	2,141 ± 0,002	9,70 ± 0,03
0,592 ± 0,001	30,775 ± 0,001	1,539 ± 0,001	2,368 ± 0,003	9,87 ± 0,03
0,620 ± 0,001	31,533 ± 0,001	1,577 ± 0,001	2,486 ± 0,003	9,85 ± 0,03
0,692 ± 0,001	33,372 ± 0,001	1,669 ± 0,001	2,784 ± 0,003	9,81 ± 0,03
0,750 ± 0,001	34,771 ± 0,001	1,739 ± 0,001	3,023 ± 0,003	9,80 ± 0,02
0,774 ± 0,001	35,334 ± 0,001	1,767 ± 0,001	3,121 ± 0,003	9,79 ± 0,02

***Tabla 2.2**. Resulta dos experimentales para la pesa maciza. Masa: 163,61 ± 0,01 g.*

A continuación se muestra la media ponderada de los valores para cada experimento con la desviación típica de la media correspondiente (tabla 3):

Pesa hueca	g = 9,90 ± 0,01 m/ s²
Pesa maciza	g = 9,81 ± 0,01 m/ s²

Tabla 3. *Media ponderada de la gravedad obtenida para cada pesa.*

Posteriormente, se llevó a cabo el ajuste del cuadrado del periodo frente a la longitud para cada pesa obteniéndose las siguientes representaciones (figuras 2 y 3):

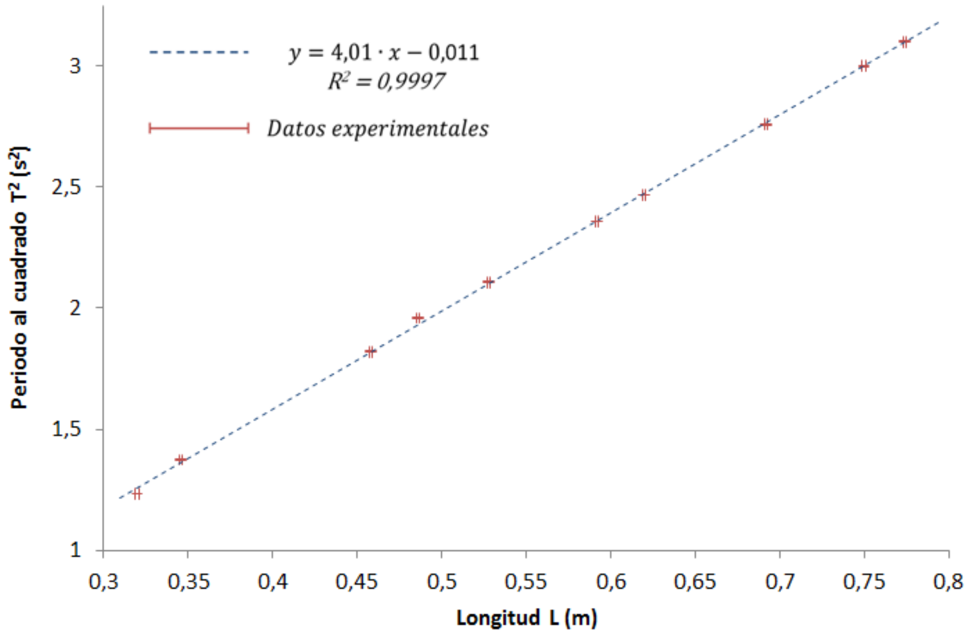

Figura 2. *Recta de regresión del periodo a l cuadrado frente a la longitud para la pesa hueca.*

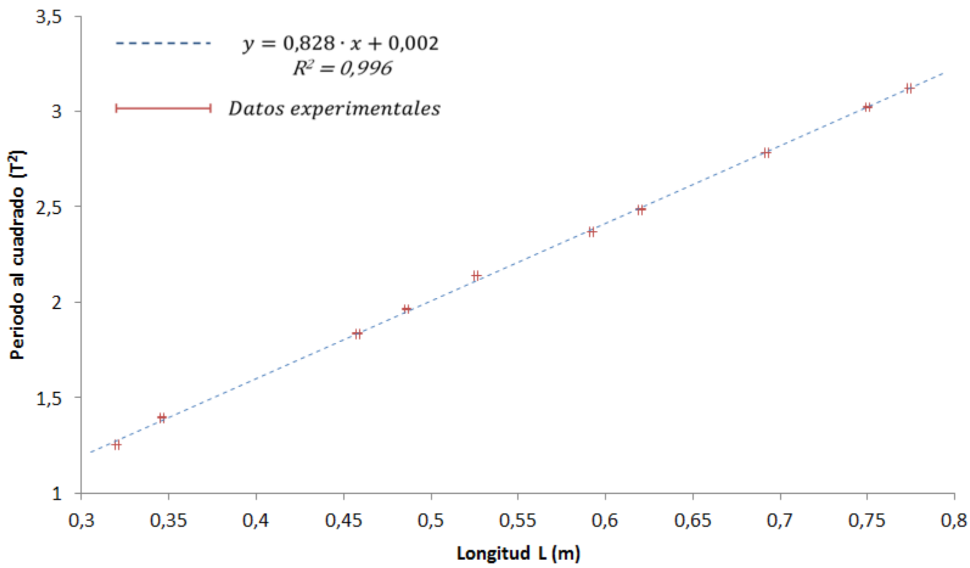

Figura 3. *Recta de regresión del periodo al cuadrado frente a la longitud para la pesa maciza.*

Tras ajustar la recta de regresión, se obtienen los siguientes valores para la pesa hueca:

$$m = 4{,}01 \pm 0{,}03 \tag{16}$$

$$b = -0{,}011 \pm 0{,}015 \tag{17}$$

$$R^2 = 0{,}9997 \tag{18}$$

Del mismo modo, se obtienen los valores para la pesa maciza:

$$m = 4{,}02 \pm 0{,}03 \tag{19}$$

$$b = -0{,}003 \pm 0{,}018 \tag{20}$$

$$R^2 = 0{,}9996 \tag{21}$$

A partir de la ecuación 12 despejamos el valor de la gravedad:

Pesa hueca	g = 9,84 ± 0,04 m/ s^2
Pesa maciza	g = 9,82 ± 0,07 m/ s^2

Tabla 4. *Valor de la gravedad obtenida para cada pesa a partir del ajuste lineal.*

A continuación, compararemos (tabla 5) los valores obtenidos para la gravedad con el valor exacto según el *National Institute of Standards and Technology* (http://physics.nist.gov/ cuu):

			Error relativo
g (real)		9,80665	-
g (media ponderada)	Pesa hueca	9,90 ± 0,01	0,95 %
	Pesa maciza	9,81 ± 0,01	0,03 %
g (regresión lineal)	Pesa hueca	9,84 ± 0,04	0,34 %
	Pesa maciza	9,82 ± 0,07	0,14 %

Tabla 5. *Comparación de los valores de la gravedad obtenidos con el valor real.*

Como se puede comprobar, todos los valores obtenidos son muy exactos en comparación con el valor real, no superando en ningún caso un error superior al 1 %.

En cuanto al valor obtenido de la media ponderada, es hasta 10 veces más exacto el valor experimental para la pesa maciza que para la hueca.

Para los valores de la gravedad obtenidos a partir de la regresión lineal, en primer lugar hay que señalar que la ordenada en el origen está muy próxima a cero tal y como se esperaba a partir de la ecuación 12. Por otra parte, los valores son ligeramente más exactos respecto al valor real.

Por ello, se puede concluir que tanto el procedimiento experimental como los dos métodos empleados para calcular el valor de la gravedad son precisos y exactos.

4. Cuestiones

4.1. Cuestión 1

¿En qué te basarías para defender la aseveración: "en la experiencia realizada los péndulos han realizado un MAS en buena aproximación"?

Como ya se ha demostrado, los valores obtenidos para la gravedad son precisos y exactos. Esto quiere decir que la simplificación planteada en la ecuación 8 es válida. Esto se debe a que el ángulo de oscilación empleado es relativamente pequeño (unos 15º).

4.2. Cuestión 2

A partir de las tablas de registro de datos, ¿se puede concluir que T no depende de la masa del péndulo?

A la vista de los resultados de la regresión lineal, no existen diferencias entre los valores obtenidos con la pesa hueca y los obtenidos con la pesa maciza. Se deduce por tanto que el valor del periodo es independiente de la masa tal y como se deduce de la ecuación 12.

4.3. Cuestión 3

¿Observas en tu tabla alguna relación de la incertidumbre o error de la medida indirecta de g respecto a la longitud L del péndulo? Intenta justificarla recurriendo a la "propagación de errores".

Sí, al observar el error asociado a la longitud, este va aumentando a medida que aumenta la longitud. Esto es debido a que el error de L es directamente proporcional a la longitud L tal y como se demuestra en la ecuación 15 del cálculo de errores.

4.4. Cuestión 4

¿Ha afectado el resultado el hecho de que una pesa sea maciza y otra hueca?

Aparentemente no. Los resultados obtenidos con la pesa maciza son levemente más precisos, aunque la diferencia no es lo suficientemente grande como para determinar que el experimento con la pesa maciza sea más preciso. Por ello, deducimos que la densidad no es un parámetro del que dependa el periodo de oscilación.

4.5. Cuestión 5

¿Mejoraría el resultado utilizando péndulos de longitudes mayores? ¿Por qué?

Al utilizar péndulos de longitudes mayores, tal y como se ha señalado en la cuestión 3, el error en la longitud sería mayor. No obstante, hay que tener en cuenta que el uso de péndulos de longitudes mayores permitiría realizar el experimento con ángulos mucho más pequeños, lo que mejoraría la aproximación del péndulo a un movimiento armónico simple. Por tanto, para responder a la pregunta haría falta tener en cuenta ambas tendencias que apuntan en sentido contrario.